O Sentido Formativo da Matemática

Cristiane Maria Cornelia Gottschalk

Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo

Em agosto de 2008, foi criado no IEA o grupo de pesquisa sobre Temas Atuais de Educação, coordenado por Maria Helena Souza Patto, do Instituto de Psicologia da USP, com a participação de Carlota Boto, Celso de Rui Beisiegel, José Sérgio Fonseca de Carvalho, Jaime Parreira Cordeiro e Maria Clara Di Pierro, todos da Faculdade de Educação da USP, e de Maria Machado Malta Campos, da PUC-SP e da Fundação Carlos Chagas.

Em 2008 e 2009, o grupo realizou uma série de debates sobre "O Sentido Formativo das Humanidades e das Ciências" que poderão ser acessados no endereço:
www.iea.usp.br/iea/online/midiateca/educacao

Embora pouco recorrente nos discursos educacionais contemporâneos, a reflexão e o debate acerca do papel formativo das humanidades e das ciências marcou a constituição do pensamento educacional moderno, segundo os integrantes do grupo.

A seguir o artigo de Cristiane Maria Cornelia Gottschalk sobre "O Sentido Formativo da Matemática".

O SENTIDO FORMATIVO DA MATEMÁTICA – UMA PERSPECTIVA HUMANISTA

Cristiane Maria Cornelia Gottschalk (FE-USP)

Tive o privilégio de ter assistido a todas as conferências do ciclo O Sentido Formativo das Humanidades e das Ci~enciasseminário realizado no ano passado, cujo tema, então, era o sentido formativo das humanidades, e gostaria de resgatar aqui parte da discussão havida pela seguinte razão: penso que as idéias apresentadas naquela ocasião permitem lançar algumas luzes sobre o sentido formativo dos demais campos das ciências, em particular no da matemática, na medida em que foram trazidos à tona valores considerados característicos da área das humanidades, mas que, a meu ver, não se distanciam muito do sentido formativo da atividade matemática. Pelo contrário, diria até que são constitutivos dela.

***

A primeira idéia que gostaria de resgatar do seminário anterior é a de que a formação nas humanidades não se reduz ao aprendizado de conhecimentos teóricos ou práticos, que serviriam para resolver problemas imediatos de uma determinada sociedade. E é o sentido desta parte da formação (que não se reduz ao aprendizado de conteúdos considerados úteis para a sociedade em que se vive) que julgo não estar assim tão distante do sentido formativo dos campos de outras ciências, em particular, o da matemática. Por exemplo, Adélia B. Menezes, ao falar do sentido formativo da literatura, nos lembrou que há 80.000 anos atrás surgem os primeiros símbolos, na arte e na religião. E a literatura, segundo ela, também nasce como uma arte: a arte da palavra, para além da competência profissional. Uma de suas primeiras manifestações, a poesia, vem da palavra *poesis*, que significa criação, o que permite ao homem imaginar outras realidades. Assim, o poeta seria aquele que convive com os paradoxos e as contradições, utilizando-os como um modo de resistir e de se opor aos valores dominantes de uma sociedade. Bem, este valor da dissidência, fundamental para se pensar o novo e, principalmente, a capacidade de imaginação, estaria excluído da formação matemática?

Uma segunda idéia que gostaria de resgatar do seminário passado é a colocação de Franklin L. e Silva sobre o próprio conceito de ‘formação’, no sentido de *Bildung*, quando retomou algumas das ponderações kantianas sobre este conceito. Lembrou-nos que para Kant a autonomia era a principal virtude da razão. Não obstante, o uso da razão pelos homens não havia evitado Auschwitz e outras barbáries. A partir desta constatação levantou as seguintes questões: como formar a autonomia no homem tendo em vista preservá-lo da barbárie e de qualquer tipo de totalitarismo? Como evitar os dispositivos deformadores que são reproduzidos através da nossa educação? Segundo Franklin, a força dos formadores de opinião padroniza e homogeneíza a informação, impondo o modelo do pensamento objetivo em detrimento da multiplicidade de perspectivas. Uma vez que a matemática é considerada o paradigma do pensamento objetivo, estaria, então, este conhecimento contribuindo para um modo reducionista e simplista de se ver o mundo?

Como veremos, estas questões estão presentes em diferentes vertentes da educação matemática, que compartilham estas preocupações. A matemática contribui para a formação de um homem autônomo e criativo, ou constrange-o a uma única forma de racionalidade que se sobreporia dogmaticamente a todas as outras? Defenderei a tese de que alguns dos valores cultivados pelas humanidades não estão assim tão distantes das ciências naturais e exatas.

De fato, em um primeiro momento, parece que se trata de áreas do conhecimento quase que opostas, no sentido de que as humanas, como o próprio nome sugere, diz respeito essencialmente ao humano, enquanto que as ciências naturais e exatas se referem a fatos do mundo natural, ou a entes ideais como seria o caso da matemática. Em particular, a matemática é vista, geralmente, como uma ciência racional e objetiva, detentora de verdades fixas e imutáveis, que vão sendo gradualmente descobertas pelos matemáticos. Estas verdades, por sua vez, seriam univocamente determinadas a partir de axiomas, postulados que levariam a teoremas inexoravelmente demonstrados. Assim, não haveria espaço para a criatividade, para a resistência ao que nos é imposto, ou para a multiplicidade de perspectivas que possibilita a convivência com paradoxos e contradições... No entanto, esta imagem correntemente veiculada do conhecimento matemático é bastante injusta e simplista[1], e procurarei dissolvê-la, recorrendo a alguns momentos da história da matemática e apresentando mecanismos do fazer matemático que apontam para uma proximidade insuspeitada entre os valores subjacentes a esta atividade e os defendidos pelos representantes das ciências humanas: a criatividade, a existência de diferentes estilos, a convivência com paradoxos e contradições e, fundamentalmente, a autonomia propiciada pela multiplicidade de perspectivas.

Um pouco de história

A reflexão sobre o valor formativo da matemática remonta aos gregos antigos. Já nos textos platônicos a ciência dos números ou aritmética era vista como um saber que transferia a alma do mundo visível (mundo sensível) para o conceitual (mundo inteligível). Segundo Jaeger, ao escrever sobre a formação do homem grego em sua obra *Paidéia*, Platão herda dos sofistas "o alto apreço em que tinham as matemáticas, mas ao contrário deles não acha que o seu verdadeiro valor reside na aplicação prática." Embora considerasse a ciência aritmética "indispensável à formação dos governantes, entre outras razões pelo seu valor militar (...) Todavia, a aritmética que Platão quer que se estude é algo mais do que uma simples ciência auxiliar para o estratego. É um estudo humanístico, pois sem ele o Homem não seria Homem (...) Platão vê nos números um saber que orienta de modo especial o nosso pensamento para o campo dos objetos que procuramos, que arrasta a alma para o Ser (...) são as matemáticas que devem despertar o *pensamento* do Homem.". As operações geométricas, em particular, implicariam em um conhecer (*gnosis*), distinto do fazer (*práxis*), "que guia ou arrasta para o pensamento, que evoca o pensamento ou o desperta, que purifica e estimula a alma." (1995, p.897-899)[2].

Se dermos um salto de 22 séculos na história do pensamento ocidental, veremos que esta importância dada à matemática como formadora do homem perdura em boa medida entre os grandes matemáticos e filósofos iluministas do século XVIII. Para os

---

1 Passarei a utilizar o termo *imagem* no sentido atribuído por Moreno ao conceito de *Bild* em Wittgenstein, após o *Tractatus* (1995), a saber, quando se faz um uso dogmático do sentido conceitual.

2 Jaeger refere-se às passagens da República de Platão 522E4 e 523A.

enciclopedistas Diderot, d’Alembert, como também para Condillac e Condorcet, a matemática não se reduzia às suas aplicações sociais, científicas e profissionais. Para todos eles, a educação matemática era um verdadeiro instrumento de emancipação intelectual (Gomes, 2008, p.325). E neste sentido, era considerada essencial à formação do cidadão. Em especial, o Marquês de Condorcet (1743-1794) chega a elaborar propostas para a educação matemática francesa no âmbito do ensino público, disputando o lugar privilegiado que ocupavam a disciplinas de humanas, pois acreditava que a matemática deveria ser acessível a todos, ao menos em suas noções básicas. Herdeiros da visão iluminista, continuam a ver a matemática como um conhecimento de alto valor cognitivo, que habilita os alunos a exercerem um papel crítico e consciente em nossa sociedade. No entanto, embora historicamente pareça ser unânime a crença no sentido formativo da matemática, como algo que transcenderia suas aplicações práticas, as razões alegadas desde os gregos antigos até hoje pressupõem diferentes concepções sobre a natureza deste conhecimento, o que, de uma forma ou de outra, acarreta em sentidos formativos muito diversos entre si.

Para Platão, por exemplo, haveria um lugar celestial, o mundo das idéias, em que as verdades da matemática pré-existem, e é neste sentido que alcançá-las seria algo que elevaria o espírito do homem, um modo de aproximá-lo das verdades eternas que a alma imortal havia contemplado em outras encarnações. Em seu diálogo *Ménon*, cujo personagem principal é Sócrates, Platão pressupõe uma razão *a priori*, que teria possibilitado a um escravo, sem nenhum acesso prévio a qualquer conhecimento de geometria, demonstrar o teorema de Pitágoras a partir do esboço de um quadrado no chão e perguntas bem direcionadas, formuladas por Sócrates. Bastaria aplicar um método, que seguisse as leis da dialética, para que todos os indivíduos pudessem ter acesso às verdades imutáveis da matemática. Por outro lado, para os matemáticos iluministas do século XVIII a matemática seria tributária, em seus conceitos básicos, da experiência dos sentidos. Para eles e mesmo para o naturalista Rousseau, o sentido formativo da matemática viria de sua contribuição para o desenvolvimento gradativo da razão, que possibilitaria ao homem discernir o erro da verdade e o bem do mal. Não obstante, tanto para Platão como para os pensadores modernos, há uma realidade matemática a ser descoberta. O método por excelência seria, no caso de Platão, a dialética, e para os últimos seria a análise (o método analítico) que vai de idéias mais complexas para as mais simples, até se chegar aos fundamentos absolutos da matemática, que seriam seus axiomas e postulados.

Estas diferentes concepções sobre a natureza do conhecimento matemático e seus respectivos métodos de investigação sugerem procedimentos pedagógicos bastante distintos. Enquanto que, no diálogo *Menon*, Platão "demonstra" que basta esboçar um quadrado no chão e fazer algumas perguntas para levar o escravo de Menon, que nunca havia aprendido geometria na vida, a demonstrar rigorosamente por si só o teorema de Pitágoras; Rousseau, que compartilhava a concepção de matemática de seus contemporâneos iluministas, irá propor no *Emílio* as seguintes diretrizes pedagógicas:

> Fazei figuras *exatas*, combinai-as, colocai-as umas sobre as outras, examinai suas relações; encontrareis toda a geometria elementar indo de *observação em observação*, sem que se trate de definições, nem de problemas, nem de qualquer outra forma demonstrativa a não ser a simples superposição. De minha parte, não pretendo ensinar geometria a Emílio, será ele quem me ensinará; procurarei relações e ele as encontrará, pois eu procurarei de tal maneira que ele as encontre. (1999, p.172, grifos meus)

Como vemos nesta passagem, no lugar de se partir de esboços de figuras para, em seguida, encadear alguma demonstração como procedeu o Sócrates platônico, pressupondo uma razão *a priori*, Rousseau enfatiza a importância de se desenvolver a própria razão, partindo-se da observação de figuras exatas e estabelecendo relações entre elas. Há aqui uma diferença fundamental em relação à concepção platônica de ensino e aprendizagem. O aluno ideal será aquele capaz de formar sua razão de modo autônomo, baseado apenas na educação que vem da natureza e das coisas, e não através das palavras de seu mestre.

Desta perspectiva rousseauniana, o aluno deve ser capaz por si mesmo de chegar às verdades da matemática, à medida que exerce seus sentidos, experimentando as coisas e seguindo apenas as leis da natureza. Só assim para Rousseau é possível preservar a liberdade do educando, tornando-o capaz de julgar por ele próprio a correção e a justeza das afirmações de outrem. Há aqui uma preocupação política que permeia sua obra pedagógica, a saber, como formar o indivíduo de modo a não se submeter à injustiça e à opressão nas sociedades em que vive. Como vemos, os ideais formativos estão de certo modo intrinsecamente ligados às concepções de matemática subjacentes aos procedimentos pedagógicos. Platão vê, nesta ciência exata, condições que arrastam o pensamento para uma condição mais elevada do homem, independentemente das possíveis aplicações práticas deste conhecimento. Já para Rousseau, e muitos de seus seguidores modernos e contemporâneos, a matemática é uma ciência que promove o desenvolvimento da própria razão (o pensamento) e, por conseguinte, a autonomia no homem, tornando-o um cidadão livre, crítico e consciente, capaz de raciocinar por si só e, conseqüentemente, não se tornar um ser submisso e manipulável pelos outros[3].

Ensino de matemática e democracia

Herdeiros destas linhas de pensamento, os documentos oficiais de diferentes países vêem a matemática escolar como um dos saberes essenciais para a formação do homem crítico, consciente de seus deveres e direitos, e atuante na sua realidade, uma vez que este conhecimento tem sido considerado o verdadeiro pilar da sociedade tecnológica, que levaria ao progresso social. Daí que todos deveriam ter acesso a ela.

A questão que surge, então, é *como* se dá a interação deste ensino com a democracia. Desde a década de oitenta surgiram diferentes vertentes da educação matemática que têm pesquisado o seu aspecto político e social, sem que se tenha chegado a um consenso em relação a como se dá esta interação. Para alguns, o aprendizado da matemática fortalece a sociedade democrática, uma vez que fornece um poderoso estilo de

---

[3] Esta preocupação aparece explicitamente em várias passagens do *Emílio*, dentre as quais, as seguintes:

> Tornai vosso aluno atento aos fenômenos da natureza e logo o tornareis curioso; mas, para alimentar sua curiosidade, nunca vos apresseis em satisfazê-la. Colocai questões ao seu alcance e deixar que ele as resolva. Que nada ele saiba porque lho dissestes, mas porque ele próprio compreendeu; não aprenda ele a ciência, mas a invente. Se alguma vez substituirdes em seu espírito a razão pela autoridade, ele não raciocinará mais e não será mais do que o joguete da opinião dos outros. (...). Quereis que ela [a criança] seja dócil quando pequena; é o mesmo que querer que ela seja crédula e enganada quando grande. Dizei-lhe sempre: *Tudo o que lhe peço é para o teu proveito, mas não tem condições de sabê-lo. A mim, o que importa que faças ou não o que exijo? É só para ti mesmo que trabalhas*. Com todos esses belos discursos que agora lhe fazeis pra torná-la sábia, preparais o sucesso das palavras que algum dia lhe dirá um visionário, um charlatão, um patife ou um louco qualquer para pegá-la em sua armadilha ou para fazer com que adote a sua loucura.” (1999, pp.206, 222).

argumentação, necessário para a vida política[4], devido ao rigor de seus raciocínios, baseados na razão e fundamentados em evidências, e não a imposição pela força ou mera retórica. Neste sentido, propicia as ferramentas para o debate democrático, em uma sociedade livre e plural. Haveria, portanto, uma relação intrinsecamente harmoniosa entre as qualidades básicas da educação matemática e os princípios democráticos, como a liberdade, a tolerância e a possibilidade de dissidência.

Por outro lado, surgem também abordagens sociológicas e políticas deste conhecimento, que passam a afirmar, ao contrário dos filósofos clássicos, que o conhecimento matemático teria uma influência eminentemente negativa na sociedade, formando indivíduos para pertencerem a uma elite política e econômica em detrimento dos demais, antecipadamente excluídos já na escola em relação a este conhecimento. Segundo Skovsmose & Valero[5] (2001), por exemplo, disfarçado pela ideologia da certeza, o poder destrutivo da matemática teria escapado às suspeitas dos cidadãos, cientistas e cientistas sociais, não só por ter se associado com a tecnologia e a ciência, participando na elaboração de armas modernas voltadas para a guerra ou na destruição do meio ambiente, entre outras influências negativas, mas também por ter tido uma função social de diferenciação e exclusão. Seleciona quem vai de fato ter participação nos processos de decisão da sociedade. Segundo Bourdieu, em seu texto “A nobreza do estado: escolas de elite no campo do poder”:

> (...) a crença na bondade e ressonância intrínseca da matemática no que diz respeito à democracia tende a legitimar a estratificação que a educação matemática efetua. Este fato não é consistente com a maioria das concepções de democracia

---

4 Esta linha de argumentação sugere que a matemática teve um uso específico na Grécia antiga, tendo a geometria euclidiana se desenvolvido concomitantemente ao surgimento da democracia.

5 Neste artigo, Skovsmose e Valero fazem um sumário das tendências atuais na educação matemática, identificando três interpretações diferentes da relação entre a democracia e a educação matemática: a primeira é que haveria uma ressonância intrínseca entre a matemática e os ideais democráticos, a segunda que tem uma influência eminentemente negativa na sociedade em diversos sentidos, e uma terceira proposta pelos autores que afirma que esta relação é crítica nos dois sentidos, ou seja, há tanto qualidades intrínsecas da matemática que interagem com a sociedade como vice-versa, os fatores políticos, econômicos e culturais também causam um impacto sobre o seu desenvolvimento. Este texto foi originalmente publicado em Atweh, B., Forgasz, H. & Nebres, B. (Eds) (2001). Sociocultural Research in Mathematics Education. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates. Utilizei a tradução de João Miguel Matos deste artigo que se encontra no *site* http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jfmatos/areas_tematicas/politica/artigos.htm.

como uma organização social onde as pessoas têm oportunidades de escolha iguais. (apud Skovsmose, 2002)

Assim, segundo a perspectiva sociológica de Bourdieu, a matemática tem servido para legitimar as diferenças sociais, ao invés de fortalecer as sociedades ditas democráticas. No entanto, penso que esta é uma abordagem sociológica e política da matemática que aponta para contradições no *uso* que tem sido feito deste conhecimento. De fato, em nossas sociedades ocidentais as carreiras que exigem conhecimento matemático são mais prestigiadas como também são as que detêm os maiores salários. Esta sem dúvida é uma atitude perversa que se ancora em uma imagem cristalizada da matemática: como paradigma de objetividade e detentora de uma única racionalidade. Parodiando Rousseau, que não criticava a razão em si, mas o mau uso que se faz dela, penso que o problema não reside no tipo de racionalidade que a matemática desenvolve, mas no *uso* que se faz dela. A matemática apresenta um modo de pensamento entre outros possíveis. Assim, a educação matemática pode ser vista como antidemocrática apenas quando se privilegia o seu modo de raciocínio em detrimento de outros, como se a objetividade fosse exclusiva deste conhecimento. Ora, a meu ver, uma das tarefas ainda a ser realizada é dissolver esta imagem da matemática, que acaba sendo manipulada pelos detentores do poder para manterem o *status quo* e perpetuarem determinadas relações de dominação.

Não pretendo neste breve ensaio dar respostas definitivas às questões de como se dá esta relação entre a matemática e a democracia. Embora, por um lado, concorde com Bourdieu e seus seguidores de que não há esta ligação intrínseca entre o pensamento matemático e os ideais democráticos, como alguns defendem ingenuamente ou por razões políticas e de poder, penso, por outro lado, que a *educação matemática* pode sim contribuir para alguns destes ideais, em vários sentidos. O primeiro deles, sem dúvida, é o sentido estritamente político, a saber, de proporcionar a *todos* os indivíduos o acesso a este conhecimento, sem que seja visto como ocupando um lugar privilegiado entre as disciplinas do ensino básico. Mas o que eu gostaria de apresentar aqui, é um outro sentido, de natureza mais filosófica, que também contribui significativamente para o desenvolvimento de valores, tais como, tolerância e uma atitude epistemológica não dogmática, não só no âmbito da pesquisa como também no cotidiano escolar. Este sentido tem a ver com a natureza do conhecimento matemático, quando *olhamos* para como se dá efetivamente esta atividade milenar em nossa civilização ocidental. Talvez assim possamos responder pelo menos em parte às seguintes questões que têm sido postas para a educação matemática: "Qual é o sentido da matemática num ambiente educacional que não tenha como objetivo educar matemáticos, mas cidadãos? Quais são as competências, capacidades e valores que tal educação pretende passar a esses indivíduos?" (Skovsmose & Valero, 2001, p.18).

A natureza convencional do conhecimento matemático

Acredito que só poderemos iniciar a responder as questões acima se *olharmos* para a atividade matemática, descrevendo seus procedimentos efetivos, ao invés de formularmos teorias sobre a sua natureza, como o fizeram as concepções idealistas, realistas ou empiristas do conhecimento matemático. Para isto, recorrerei a algumas idéias do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein, um dos maiores representantes da virada lingüística, movimento filosófico que se deu no final do século XIX e início do século XX. Sob sua perspectiva, as proposições matemáticas não descrevem objetos ideais pertencentes a um reino platônico, nem, tampouco, são extraídas da experiência sensível. Se *olharmos* para o uso que fazemos delas, veremos que exercem uma função normativa, organizam nossa experiência empírica de determinadas maneiras. São invenções dos homens, e não descobertas. Neste sentido, são de natureza *convencional*.

Desta perspectiva wittgensteiniana do conhecimento matemático, vou defender a idéia de que a *atividade matemática* tem um desenvolvimento conceitual que, embora mantenha relações com o contexto empírico em que ocorre, independe do eventual uso social ou político que é feito deste conhecimento. A história social da matemática se distingue de outra história, digamos, *transcendental* da matemática, história das renovadas condições de possibilidade dos conceitos. Estas condições são de natureza convencional que até podem ser eventualmente alteradas a partir de razões empíricas, como interesses sociais ou políticos; o que leva, todavia, a estas modificações, são obstáculos de natureza epistemológica, ou seja, são razões *internas* a este conhecimento que obrigam os matemáticos a reverem determinados postulados, axiomas ou procedimentos. Vejamos um exemplo na história da matemática, bastante esclarecedor de como se dá esta atividade conceitual, para em seguida extrair deste exemplo alguns princípios éticos subjacentes a ela, surpreendentemente muito próximos dos valores mencionados inicialmente relativos às ciências humanas.

Escolhi um momento da história da matemática, que foi a resolução do problema da continuidade da reta. Em que consiste a continuidade? Como apresentar um tratamento rigoroso deste conceito? Este problema foi abordado simultaneamente por dois grandes matemáticos, Dedekind e Cantor, que responderam a estas questões de modo semelhante. Sem entrar em detalhes técnicos, reproduzirei uma passagem da obra de Dedekind, publicada em 1872, *Continuidade e Números Irracionais*, onde ele formula uma propriedade característica e precisa de continuidade que pudesse servir de base a deduções consideradas verdadeiras pelos matemáticos. Embora muitos matemáticos postulassem que a reta era contínua, afirmando que todo ponto da reta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal maneira que todo ponto de uma dessas partes está à esquerda de todo ponto da outra (o que seria uma observação empírica como preconizado por Rousseau), esta caracterização ainda era considerada muito vaga e imprecisa. Não se tinha como saber, por exemplo, se sempre existe o ponto que separa a reta nestas duas partes. Em outras palavras, como garantir que não havia "furos" na reta? Para resolver então este problema, Dedekind sugere, como ele próprio o afirma, "uma solução bem banal", propondo ver a essência da continuidade simplesmente na inversão desta propriedade (de que todo ponto da reta determina uma decomposição da mesma em duas partes), ou seja, formulando o seguinte princípio:

> "Se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes." Como já disse, creio não errar admitindo que toda a gente reconhecerá imediatamente a exatidão do princípio enunciado. A maior parte dos meus leitores terá uma grande desilusão ao aprender que é esta banalidade que deve revelar o mistério da continuidade. A este propósito observo o que segue. Que cada um ache o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da reta, isso me satisfaz ao máximo grau, porque nem a mim nem a ninguém é possível dar deste princípio uma demonstração qualquer. A propriedade da reta expressa por

este princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma deste axioma que nós pensamos a continuidade da reta, que reconhecemos à reta a sua continuidade[6].

Assim, Dedekind resolve o problema da continuidade da reta postulando um axioma, que passou a ser conhecido como axioma da continuidade Dedekind-Cantor, que diz *o que é ser* uma reta. Ser uma reta é satisfazer este axioma, isto é, qualquer que seja o corte de uma reta em duas partes, existe sempre um ponto da reta que separa as duas partes (classes de pontos). Este axioma tem a natureza de uma regra, produzindo-se a partir dele não só a noção de continuidade de uma reta, como uma definição dos números irracionais que permitiu resolver uma questão que afligia os matemáticos há muito tempo: a necessidade de se estabelecer uma correspondência definitiva entre os números e a reta[7]. Estes grandes avanços do conhecimento matemático, como vemos, não foram baseados em nenhuma demonstração. Dedekind apenas sugeriu um outro modo de ver a continuidade da reta: vejam como o contrário do que estavam vendo... Em outras palavras, convencionou um outro modo de ver, convencional, "fundamento sem fundamento", como diria Wittgenstein. Através deste exemplo da história da matemática, e de inúmeros outros[8], como seus fundamentos são de natureza convencional, não há como justificar exaustivamente seus procedimentos (*ad infinitum*.). Como diz Wittgenstein: "Se esgotei as justificativas, cheguei então à rocha dura, e minha pá se entorta. Estou inclinado a dizer então: 'É assim mesmo que ajo.'" (PI, §217). O que Dedekind fez foi tornar norma um procedimento banal, que após muita resistência por parte dos matemáticos foi finalmente incorporada como regra a ser seguida, como axioma, ou ainda, como uma das chamadas evidências matemáticas.

Mas como vemos, o que acaba sendo aceito como evidência matemática não é tão evidente assim, nem para os próprios pesquisadores matemáticos e muito menos para os alunos... Como então, persuadir o aluno a aceitá-las? É neste momento que surge no ensino

---

[6] Extraído do site: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/dedekind.htm

[7] A idéia de Dedekind consistia em representar cada número real como uma divisão, um corte nos números racionais. Isto é, todo número real r divide os números racionais em duas partes distintas, os maiores e os menores que ele.

[8] Cf. Granger (2002).

a necessidade de trabalhar a *vontade* do aluno para ver novos aspectos. Este é um valor extremamente importante a ser cultivado não só na atividade do pesquisador matemático como ao longo do aprendizado da matemática, já no contexto da escola. Retomando alguns dos sentidos formativos das humanidades relembrados no início, como o da formação do homem para o pluralismo e as diferenças, capacitando-o a mudar a sociedade em que vive ao admitir uma multiplicidade de perspectivas, como também o exercício da vontade em ver novos aspectos, podem, sem dúvida, contribuir significativamente para a formação deste homem. É neste sentido que vejo uma proximidade relevante das ciências humanas com as outras ciências, em particular com a matemática.

Além disto, o matemático também convive com paradoxos e contradições que o obrigam a *inventar* novos objetos e a formular novas teorias matemáticas, abrindo, assim, novos campos de investigação, e *criando* novas condições de sentido para organizar o mundo empírico. Ora, esta atividade contínua do matemático apenas eventualmente tem como objetivo responder a demandas imediatas da sociedade. A história nos mostra que, na maior parte das vezes, são questões de natureza lógica e internas ao conhecimento matemático que move sua investigação. Estas invenções e criações nem sempre foram bem recebidas pela própria comunidade dos matemáticos; houve quase sempre muita resistência em se aceitar a criação de novos objetos matemáticos. Só no campo dos números, por exemplo, é notável a rejeição que houve por parte da comunidade para se aceitar desde a introdução do número zero como fazendo parte dos números naturais, até a invenção dos irracionais por Cantor e Dedekind, a definição do número infinito e a teoria que se seguiu dos números transfinitos, dentre vários outros exemplos.

Como vemos, não tão distante das humanas assim, a matemática, para além da aplicação de cálculos e algoritmos, também exige imaginação e criatividade. A resolução do problema da continuidade não se deu através de uma demonstração matemática, mas sim por uma *invenção*, inventou-se um axioma que passou a exercer uma função normativa, ou seja, passou a ser condição de sentido para o conceito de reta: diz o que é ser reta no jogo de linguagem da geometria analítica. Em outras palavras, inventou-se uma nova *convenção*. Neste sentido, como na literatura, o matemático também imagina outras realidades e cria novos conceitos. E são estes atos que contribuem para o pluralismo das idéias, evitando-se, assim, o totalitarismo do pensamento. A história da matemática também nos mostra, em diferentes momentos, como ela é movida por paradoxos e contradições, ou seja, o irracional revela-se como verdadeiro motor do seu desenvolvimento, obrigando o matemático a *inventar* novos objetos, e não a descobri-los.

O irracional na matemática e seus diferentes estilos

Na história da matemática o irracional é introduzido oficialmente entre os gregos antigos quando se procura fazer uma aproximação das relações de grandezas por números, quando estas grandezas são incomensuráveis. Isto ocorre por volta de 410-403 a C. com a descoberta da incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado, quando a diagonal *d* e o lado *a* são primos entre si. Curiosamente, são estas relações que Platão explora no seu diálogo *Ménon*, quando conduz o escravo de Ménon a uma demonstração geométrica do teorema de Pitágoras que contorna o problema da incomensurabilidade. É através de demonstrações engenhosas como esta que os matemáticos convivem com as contradições até que novas regras sejam inventadas e novos procedimentos aplicados, constituindo-se, assim, o conhecimento matemático - uma das *obras* humanas no sentido dado ao conceito de *obra* pelo.epistemólogo francês Gilles-Gaston Granger, a saber, "um produto suscetível de manter-se na existência concreta e de oferecer-se à observação, e mesmo ao uso, de outros sujeitos que não o seu criador."[9] (Granger, 2002, p.12) Podemos ver, então, o conhecimento matemático como uma das obras humanas em cuja construção o irracional tem um papel decisivo.

O irracional surge, em geral, quando a produção de uma obra ocorre contra ou fora de certas regras implícitas ou manifestas, que determinam quais deveriam ser os processos de criação e a natureza da obra em questão. Segundo Granger, a origem do conceito de irracional no pensamento ocidental vem provavelmente da noção matemática de irracional. Desde os primórdios da matemática, seus criadores se depararam com obstáculos de natureza epistêmica que os obrigaram a efetuar operações consideradas impossíveis pelas

9 De modo geral, uma obra é resultado de um trabalho, que envolve "a criação de uma relação entre uma matéria e uma forma, tanto no caso da obra propriamente material quanto no da obra não diretamente encarnada, como um texto científico ou literário" (Granger, 2002, p.12).

regras anteriores[10]. Não obstante, prosseguiam sua obra mesmo sem compreensão dos resultados exitosos de sua realização. Apenas posteriormente viriam a formular teorias que conseguiam superar o obstáculo, ou seja, retornava-se ao domínio do racional. Surpreendente é que seja esta irrupção contínua do irracional no pensamento matemático a responsável pelo seu desenvolvimento.

De modo geral, uma obra se propõe como expressão, em parte, de um conjunto de regras sintáticas conhecidas *a parte ante*, e, em parte, veiculada por uma gramática mais ou menos livremente constituída *a parte post* pelo contemplador ou pelo usuário da obra em questão, que é o que Granger vai chamar de estilo[11] (2002, p.13). Assim, a matemática vista como uma obra humana caracteriza-se também pelo processo de criação[12] inerente a ela, e não apenas pelo trabalho estruturalmente regrado necessário para sua consecução, comportando diferentes estilos, tanto no modo como vai sendo construída pelos matemáticos (o estilo demonstrativo de Euclides, o estilo de Dedekind e Cantor...) como pelo modo como é apropriada por seus usuários, em diferentes contextos.

Na sala de aula

Mas ao longo desta apropriação do conhecimento matemático pelo *aluno*, restaria a ele uma atitude meramente contemplativa? O aspecto inventivo e criativo da matemática desaparece na disciplina de matemática no ensino básico? Estas características investigativas seriam atribuições exclusivas do pesquisador matemático? Como garantir a transmissão dos valores acima (tolerância, criatividade, imaginação, liberdade e o anti-dogmatismo) intrínsecos à atividade matemática para os contextos educacionais, que

---

10 Na matemática, o irracional como obstáculo é o objeto que torna a aplicação destas regras contraditória ou impossível.

11 Granger caracteriza mais precisamente este termo em sua obra *Essai d'une Philosophie du Style*.como sendo a organização dos aspectos não pertinentes ou as redundâncias da linguagem pelo criador e sua percepção semilivre pelo contemplador.

12 Criação entendida como um processo que se caracteriza por atribuir significação ao conteúdo trabalhado independentemente das regras estruturais da obra, e que constitui a fonte do *estilo*.

envolvem a transposição didática deste conhecimento, métodos de ensino, relações diferenciadas entre professor e uma classe?

O ensino da matemática também pressupõe um conjunto de regras a serem apresentadas pelo professor, digamos *a parte ante*, e em um segundo plano, *modos* de apresentação destas regras que vão constituir o significado dos objetos matemáticos e que serão apropriados pelos alunos ao longo deste segundo plano, mediante um simbolismo não dado *a parte ante*, mas, construídos *a parte post*. Assim, do mesmo modo que há diferentes estilos envolvidos na produção do conhecimento matemático, há também diferentes estilos no uso de seus conceitos no âmbito escolar. Acredito que neste novo contexto também há um grau de liberdade possível para organizar os aspectos não pertinentes ou as redundâncias do conhecimento matemático, tanto da parte do professor como da parte do aluno.

Um exemplo que considero bem elucidativo é quando o aluno começa a aprender outros usos dos números além da contagem dos naturais. A criança que chega à escola muitas vezes já sabe contar, memorizou a ordem dos números naturais e a utiliza para contar quantos doces trouxe para o lanche, ou quantos quarteirões ela teve que andar para chegar à escola, enfim, tarefas rotineiras que vão surgindo no dia a dia. Uma vez na sala de aula, novos *usos* do conceito de número vão sendo introduzidos, novas técnicas são ensinadas, como por exemplo, ela aprende a medir objetos, e para isso, novos números são introduzidos. A partir de palavras que já utiliza no seu cotidiano, como metade, meio, parte, etc., aprende a usar os números racionais. Assim, o professor introduz uma nova aplicação do conceito de número, não apenas para contar objetos em geral, mas agora também para medir estes objetos. Em outras palavras, o que o professor está transmitindo é um outro modo de ver o conceito de número: *veja como* algo que também mede. Chamo a atenção para o fato de que este novo uso da palavra número não invalida o uso anterior, o da contagem. Apenas um novo procedimento foi introduzido, ampliando o significado de número. Novas técnicas são ensinadas (técnicas de mensuração) envolvendo também a técnica da contagem, modos determinados de agrupar e comparar objetos, enfim, estes diferentes modos de operar vão se entrelaçando e constituindo o campo de ação da aritmética. O aluno é assim introduzido ao aspecto inventivo da matemática, na medida em que sua vontade é disponibilizada para ver novos aspectos, trabalhando-se, desta maneira, a sua imaginação. Neste processo recursos didáticos são empregados e o aluno é persuadido (ou não) a aceitar novos empregos de conceitos já aprendidos e a operar com eles de modos inusitados. Como cada professor desempenha esta tarefa comporta certo grau de liberdade, em função dos alunos que tem diante de si e da escola em que se encontra.

Skovsmose e Valero (2001) fazem uma crítica às formas de comunicação em sala de aula, "que assumem a existência de uma autoridade omnisciente, representada, senão pelo professor, pelo manual escolar ou pelas ferramentas tecnológicas. Deste modo, a comunicação é estruturada através de um absolutismo burocrático, segundo o qual não é necessária nenhuma justificação particular para as diferentes atividades apresentadas aos alunos na sala de aula." (p. 19) Podemos imaginar uma situação em que o professor não se dê ao trabalho de justificar um teorema, ou acredite que ensinar matemática para uma classe inteira é "jogar pérolas aos porcos", já esperando de antemão que apenas alguns alunos, os mais dotados, irão aprender o que está sendo ensinado. Todavia, de modo geral, não é isto o que ocorre, pelo menos nos primeiros anos do ensino básico. Se muitos alunos saem do ensino fundamental sem dominar as operações básicas da aritmética isto se deve muito mais às condições sociais e econômicas de uma boa parte da população do que, propriamente, aos métodos de ensino utilizados pelo professor ou aos materiais didáticos que são utilizados. Quando se diz em tom de crítica que este conhecimento é imposto dogmaticamente pelo professor, o que cultivaria uma atitude de submissão no aluno e contribuiria para a manutenção das relações político-sociais de dominação na sociedade capitalista e globalizada, penso que este julgamento é bastante apressado. As questões de injustiça social, derivadas de sistemas econômicos e políticos perversos, existem sem dúvida alguma, e devem ser enfrentadas criticamente. Mas considerar que o professor e suas ferramentas didáticas apenas perpetuem este estado calamitoso é um equívoco, pois é exatamente a sua autoridade, ou a dos livros didáticos, que vai permitir que o aluno adquira novos modos de agir, diferentes dos habituais, constituindo desta maneira novos significados. Em suas últimas reflexões sobre a constituição das certezas que adquirimos sobre o nosso mundo empírico ou mental, Wittgenstein (1998) faz as seguintes afirmações:

> Geralmente tomo como verdadeiro o que se encontra em livros didáticos, de geografia por exemplo. Por quê? Eu digo: Todos estes fatos foram confirmados centenas de vezes. Mas como sei disto? Qual é a minha evidência para isto? Tenho uma imagem do mundo. É verdadeira ou falsa? Acima de tudo é o substrato de toda

> minha investigação e afirmações. As proposições que a descrevem não são todas igualmente sujeitas à prova. (Wittgenstein, #162)

> "Estamos muito certos disso" não significa apenas que toda e qualquer pessoa esteja certa disso, mas que pertencemos a uma comunidade que está ligada pela ciência e pela educação. (Wittgenstein, #298)

Em outras palavras, a autoridade do professor e a dos livros didáticos são os modos de que dispomos para a transmissão de uma imagem do mundo, a qual é vista por Wittgenstein como *condição* para que haja conhecimento. É o que permite a organização e descrição de fatos empíricos e mentais, e atribuição de sentido às nossas ações. As proposições que expressam a nossa imagem do mundo, ou seja, nossas certezas mais fundamentais, não são postas à prova (não são nem verdadeiras nem falsas). Tampouco são extraídas de nossa experiência empírica ou de processos mentais. Segundo Wittgenstein, decorrem de um acordo profundo em nossas formas de vida, parcialmente apresentado pelo professor no contexto escolar. O que passamos a julgar como verdadeiro ou falso pressupõe este acordo, e, neste sentido, uma criança que só duvidasse de tudo (inclusive de seu professor...) seria incapaz de aprender qualquer coisa. Daí a importância de se reconhecer na autoridade do professor e na dos livros didáticos uma condição de possibilidade de acesso às nossas heranças culturais, não com o objetivo de meramente perpetuá-las acriticamente, mas para que o aluno, a médio e longo prazo, seja capaz de dar continuidade a elas, instaurar rompimentos e, já como pesquisador, eventualmente, criar o novo. Lembrando que nossas tradições são tradições de crítica, a própria história das disciplinas nos mostra uma sucessão de rompimentos em todas as áreas do conhecimento, cabe ao professor apresentar ao aluno esta dinâmica de instauração de novos aspectos na passagem de uma tradição a outra. Este tipo de inserção do aluno nas diversas tradições, vistas como corpos de conhecimento passíveis de ruptura e não meramente de perpetuação do *status quo*, já se configura como um trabalho de formação, que vai muito além da mera transmissão de determinados conteúdos.

Como vimos na história da matemática, Dedekind sugere um novo modo de ver a reta, que rompe com os paradigmas anteriores, suscitando uma grande resistência por parte da comunidade matemática. A aceitação de seu axioma de continuidade da reta, só foi possível após muita insistência e um verdadeiro trabalho de persuasão. Eis um exemplo de uma nova proposição que passa a fazer parte de nossa imagem do mundo e que não é sujeita à prova. A reta foi apresentada sob um novo aspecto, expresso na forma de um axioma: *veja* a reta *como* satisfazendo o princípio de que dada uma repartição da reta em duas classes, sempre existirá um único ponto pelo qual é produzida esta repartição, garantindo-se, assim, a continuidade da reta. No contexto escolar, é através do professor e de seus instrumentos didáticos que esse novo conhecimento é sancionado perante o aluno como legítimo, o que não significa que não possa passar por novas rupturas e modificações em outros contextos.

Assim, mesmo que o aluno não invente objetos ou procedimentos matemáticos (isto é tarefa do pesquisador), o ensino de suas proposições e procedimentos permite que o aluno dê o passo inicial para ampliar o leque das condições de sentido com as quais organiza o mundo empírico. Um segundo passo é ser inserido pelo professor em outras tradições, outros modos de se organizar a experiência, através da história da disciplina ou mesmo através de um exercício de imaginação. Penso que esta é uma das condições fundamentais para o exercício da tolerância e o de uma postura não dogmática, uma vez que se aprende um *ver como*, ou seja, ver outros modos de aplicação de conceitos previamente construídos e que possibilitam a criação de outras realidades. Enfim, retornando às questões inicialmente colocadas, o sentido formativo da matemática, a exemplo do sentido formativo das humanidades, também contribui significativamente para a formação de um homem autônomo, que convive com paradoxos e contradições (fonte de criação) e que é capaz de imaginar outras realidades possíveis, ampliando, assim, o leque de perspectivas que atribuem sentido ao mundo em que vive. Um sentido muito próximo ao da formação do poeta e a dos que combatem qualquer tipo de dogmatismo.

Bibliografia

Bicudo, M. A. V. *Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas*.São Paulo: Ed. Unesp, 1999.

Frascolla, P. “Wittgenstein sur la preuve mathematique”. In: *Wittgenstein et les Mathématiques*. Paris: Éditions Trans-Europ-Repress, 2004.

Gomes, M.L.M. *Quatro Visões Iluministas sobre a Educação Matemática*. Campinas, SP: Ed. Unicamp, 2008.

Gottschalk, C.M.C. “O papel do mestre: Mênon revisitado sob uma perspectiva wittgensteiniana”. *Revista Internacional d’Humanistats*. Ano X – N.11, pp.13-28, 2007.

__________________ “A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana.” *Cadernos Cedes*,vol. 28, n.74, pp.75-96, 2008.

Granger, G. G. *Essai d’une Philosophie du Style*. 1ª ed. Paris: Armand Colin, 1968.

_____________ *O Irracional*. São Paulo: Ed. UNESP, 2002.

Jaeger, W. *Paidéia – A formação do Homem Grego*. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

Moreno, A. R. *Wittgenstein – através das imagens*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1995.

Rousseau, J. –J. *Emílio, ou, Da Educação*. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

Skovsmose, O. & Valero, P. “Quebrando a neutralidade política: o compromisso crítico entre a educação matemática e a democracia.” In: *Sociocultural Research in Mathematics Education*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 2001.

In: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jfmatos/areas_tematicas/politica/artigos.htm.

Wittgenstein, L.*Philosophical Investigations*. Oxford: Blackwell, 1997.

______________*On Certainty*.Oxford: Blackwell Publishers Ltd, 1998.